Denkfehler mit Wahrscheinlichkeiten

verfasst von Dominik Meyer
18. September 2015

Einleitung

Jeder Mensch muss ständig Entscheidungen treffen, oft zwischen mehreren Alternativen. Bewusste Entscheidungen, wie eine bestimmte Aktie zu kaufen oder in ein bestimmtes Restaurant zum Essen zu gehen. Auch unbewusste Entscheidungen, wie an der roten Ampel stehen zu bleiben, obwohl man gedankenverloren sein Telefon studiert oder schnell unter dem fallenden Kleinkind in die Luft zu greifen um es aufzufangen.

Je nach Art der Entscheidung findet die Entscheidungsfindung auf verschiedensten Ebenen und Arten statt. Will ein Mensch das Kleinkind fangen, so kann das gar nicht unbedingt als „Wille“ unterstellt werden, sondern wird von dem schnellen, unterbewussten sogenannten *System 1* entschieden[1]. Dieser Prozess ist eingerichtet schnell reflexartige Entscheidungen in Situationen zu treffen, die dies erfordern. Langes Nachdenken und Abwägen der Vor- und Nachteile wären hier zu langsam. Sollte die Entscheidung auf diesem Weg getroffen werden läge das Kind schon lange am Boden. Das Geschrei wäre groß.

Anders stellen sich bewusste Entscheidungen dar, wie zum Beispiel beim Kauf einer Aktie. Meist werden im Vorfeld Marktanalysen studiert und Experten befragt. Nach einem langen Prozess des Abwägens von Pro- und Contra kommt schließlich das *System 2*, das rationale System, zu einem Schluss und die Entscheidung wird ausgeführt. Dabei finden vielerlei Denkprozesse statt, die einiges an Anstrengung und Energie benötigen. Der Mensch muss sich zwingen den Entscheidungsprozess durchzuführen.

Interessant gestaltet sich hierbei wie die Entscheidungsprozesse in genau diesem Fall ablaufen. Der Kauf einer Aktie ist eine Entscheidung, die eine gewisse Unsicherheit beinhaltet. Es kann nicht sicher vorausgesagt werden, wie sich der Markt und damit auch der Wert der Aktie entwickeln wird. Der Mensch wendet in einem solchen Fall, wenn Wahrscheinlichkeiten im Spiel sind, Heuristiken an, die eine Entscheidung erleichtern[2]. Eine eingehende, wissenschaftlich-mathematisch korrekte Behandlung ist in den meisten Fallen für den Einzelnen zu schwer oder zu umständlich. Menschen entscheiden daher, wenn es um Wahrscheinlichkeiten geht oft nach Heuristiken, die manchmal nicht passen.

Heuristiken in diesem Zusammenhang beschreiben bestimmte Vereinfachungen von Situationen, um sie leichter begreifbar zu machen. Eine Entscheidung in dieser vereinfachten Situation gelingt besser als unter der Fülle der Informationen der Ausgangssituation. Diese Heuristiken und Vereinfachungsprinzipien sind in meistens sehr hilfreich, können aber manchmal auch Fehler provozieren. Werden beispielsweise bei der Vereinfachung essentielle Aspekte der Entscheidungssituation außen vor gelassen, verändert sich eventuell die Entscheidungsgrundlage nicht nur dahingehend, dass sie einfacher, sondern auch falsch wird. Es geschieht ein Wahrscheinlichkeitsfehlschluss.

Eine andere Art von Wahrscheinlichkeitsfehlschluss geschieht, wenn zwar keine falsche Heuristik angewendet wird, sondern die Wahrscheinlichkeiten selbst falsch berechnet werden.

Wann die Fehlschlüsse geschehen wurde von Verhaltenspsychologen in den unterschiedlichsten Situationen untersucht. Um zu zeigen, dass der Mensch Wahrscheinlichkeitsfehlschlüsse tätigt, soll in dieser Arbeit auf drei sehr bezeichnende Beispiele zurückgegriffen werden. Diese kennen wir alle aus unserem Alltag, oder können die Situation gedanklich durchspielen und nachvollziehen, wo und in welcher Weise der Fehlschluss geschieht. Dabei findet üblicherweise in jedem Beispiel eine bestimme Heuristik Anwendung, die schließlich zum Fehlschluss verleitet.

Das erste Beispiel ist eine Szene aus dem Casino, in der ein Gast dem Spielerfehlschluss am Roulettetisch erliegt. Die selbe Situation lässt sich bei Nicht-Glücksspielern zum Beispiel im Brettspiel beobachten. Die Vereinfachung in diesem Fall ist die Annahme, dass man Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit nur einer geringen Anzahl von Beispielen korrekt abschätzen kann.

Das zweite Beispiel zeigt, wie unsicher doch Entscheidungen auf Basis von medizinischen Tests sind und wie vielen vielleicht Sicherheit vorgegaukelt wird, wo keine existiert. Die selbe Situation bietet sich umgekehrt genauso. Manch ein Eingriff wäre gar nicht nötig gewesen und wurde nur durchgeführt, weil ein Test ein Indiz geliefert hat. Natürlich spielen hier noch viele weiteren Faktoren, wie Absicherung der Ärzte gegenüber Versicherungen mit hinein, aber zugrunde liegt meist ein Wahrscheinlichkeitsfehlschluss mit Bezug auf Testergebnisse. Die angewendete Heuristik besteht darin, die Korrektheit von Testergebnissen überzubewerten. Ein Test, der sehr oft richtig liegt wird vereinfachend als immer richtig angenommen.

Das dritte Beispiel ist hier zuletzt aufgeführt, weil es ganz besonders bezeichnend dafür ist, wie sehr der Mensch in die Irre geführt werden kann, wenn es um Wahrscheinlichkeiten geht. Es handelt sich

[1] [Kahneman (2012)] bezeichnet das *System 1* als das „schnelle Denken“ und *System 2* als das „langsame Denken“, zu dem wir uns gewissermaßen zwingen müssen.

[2] [Tversky & Kahneman (1974)]

dabei um das berühmte sogenannte *Ziegenproblem*[3]. Dieses hat selbst unter studierten Mathematikern zu einiger Verwirrung und Streitdebatten geführt. Die intuitive Lösung erscheint bei diesem Problem so klar und logisch, dass die richtige Lösung absurd und falsch erscheint. Dabei schleicht sich die tückische Vereinfachung in den Gedankengang des Menschen, dass die erste Entscheidung in diesem zweistufigen Problem unabhängig von der zweiten ist. Diese Annahme ist falsch und führt zum Fehlschluss.

Abschließend werden zwei Techniken vorgestellt, die helfen können Wahrscheinlichkeiten besser und einfacher verständlich zu machen. So können bessere Entscheidungen getroffen werden. Der erste Trick besteht darin zu klären auf welche Menge von möglichen Objekten sich die Wahrscheinlichkeit bezieht. Der zweite darin einfach alle Möglichkeiten aufzuzählen und somit die richtigen, für die Entscheidung relevanten, Wahrscheinlichkeiten auszurechnen.

Fehlschluss im Glücksspiel

Betritt man ein Casino mit vielen einarmigen Banditen und Spieltischen, so ist er erste Eindruck meist die Überforderung in allen Sinnen. Bunte Lichter sollen die Maschinen attraktiv erscheinen lassen und laute Töne im Fall, dass der Jackpot am einen Ende des Casinobereichs geknackt wird, lassen dies alle Besucher gleichzeitig wissen. Diese Methoden sollen den Besucher natürlich dazu veranlassen möglichst viel Geld auszugeben. Es wird eine große Chance zu gewinnen suggeriert, die so gar nicht existiert. Denn die meisten Menschen wissen eigentlich: „Am Ende gewinnt immer die Bank".

Oft lässt sich beobachten, dass Roulettespieler in jeder Runde die Zahl und deren Farbe notieren, die gewonnen hat. Nach einer Reihe von Gewinnen einer bestimmten Zahl oder Farbe setzen sie genau auf diese im Glauben, diese Zahl würde an genau diesem Tisch besonders oft getroffen. Grundsätzlich könnte man argumentieren, dass durch physikalische Effekte und Ungenauigkeiten bei der Konstruktion des Tisches tatsächlich bestimmte Zahlenkombinationen bevorzugt werden, doch vielfältige Kontrollprozesse von Seiten des Casinobetreibers lassen diese Möglichkeit so gut wie ausschließen.

Der Fehlschluss besteht in diesem Fall darin, dass der Mensch von einer Reihe von Häufungen bestimmter Muster in einem Glücksspiel auf eine generelle Einseitigkeit des zufälligen Auswahlprozesses von Zahlen im Spiel schließt[4]. Der Spieler meint nun, dass sich beobachtete Abfolgemuster im Spiel wiederholen müssen und verteilt seine Einsätze danach[5]. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit bei jeder Runde unabhängig gleich verteilt und jede Zahl wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{38}$ getroffen[6].

Casinos nutzen diesen Fehlschluss aus, indem an manchen Roulettetischen Bildschirme befestigt werden, die die letzten Zahlen auflisten und auch die Häufigkeiten zählen, die Rot oder Schwarz in den letzten paar Spielen hatten. So wird der Wahrscheinlichkeitsfehlschluss, die *Gambler's Fallacy*, gezielt provoziert.

Dass dieser Fehlschluss nicht im Erwachsenenleben erlernt ist, oder gar nur in Verbindung mit Glücksspiel auftritt, zeigt folgendes Beispiel. In einer Spielrunde *Mensch-Ärgere-Dich-Nicht*, muss als erster Spielzug eine Sechs gewürfelt werden, um mit der Spielfigur auf das Spielbrett ziehen zu dürfen. Dazu hat man drei Versuche. Sollte es innerhalb dieser drei Versuche nicht gelingen eine Sechs zu würfeln, so ist der nächste Spieler an der Reihe.

Es kann durchaus vorkommen, dass man es auch in mehreren Spielrunden nicht schafft auf das Spielbrett zu ziehen. Jede der drei Chancen bleibt es verwehrt eine Sechs zu würfeln. Schon als Kind kommen da bei vielen Gedanken auf, dass das „doch gar nicht sein kann". Nach so vielen anderen Zahlen „muss die Sechs auch einmal wieder an die Reihe kommen".

Dies ist der Spielerfehlschluss, wie wir ihn bereits im Casino beobachten konnten. Der Spieler denkt, dass der Würfel in irgend einer Weise beeinflusst ist, die zu seinen Ungunsten ausfällt und eine Zahl verschieden der Sechs bevorzugt. Dabei ist die Chance auf eine Sechs in jedem Wurf unverändert $\frac{1}{6}$. In Wirklichkeit erhöht sich die Chance auf eine Sechs in einer Folge von Würfelwürfen als Gesamtes betrachtet tatsächlich mit jedem Durchgang. Die Heuristik, dass Zahlen „auch mal wieder an die Reihe kommen müssen" ist folglich nicht ganz falsch.

[3] engl. *Monty-Hall-Problem*

[4] Eine Einseitigkeit oder auch *Bias* bezeichnet hier eine Abweichung von der ursprünglichen Verteilung (im Beispiel von Roulette der Gleichverteilung über alle Zahlen).

[5] [Keren & Lewis (1994)] bezeichnen diese Art des Fehlschlusses als *Gambler's Fallacy Type I*.

[6] Unter der Annahme, dass es sich um die Variante *französisches Roulette* handelt, bei dem die Zahlen 0 bis 36, sowie 0 und 00 möglich sind.

Fehlschluss bei der Vorsorge

Für Männer im fortgeschrittenen Alter rücken Gesundheitsthemen immer mehr in den Fokus. Heutzutage beschäftigen insbesondere Krebserkrankungen immer mehr Menschen, da diese die zweithäufigste Todesursache in Deutschland[7] sind. Diese Statistiken beunruhigen natürlich zurecht und veranlassen den Einzelnen sich über mögliche Vorsorge und Behandlungsmöglichkeiten zu informieren. Nach Lungenkrebs wird Prostatakrebs[8] bei Männern als zweithäufigste Ursache für den Tod aufgeführt und rückt daher besonders in den Fokus. Da erscheint es gut, dass die vielen Verbände der Urologen Informationsbroschüren über den Krebs und die Möglichkeiten zur Vorsorge herausgeben.

In einer solchen Informationsbroschüre über Prostatakrebs[9] wiederholen sich die eben genannten Fakten. Es ist die Rede von „rund 65.000 Neuerkrankungen an Prostatakrebs in Deutschland [pro Jahr]“ und Prostatakrebs rangiert auf dem dritten Platz der Todesursachen für Männer, was sich mit den Zahlen des Statistischen Bundesamtes deckt. Dies schürt die Angst vor einem verfrühten Tod zusätzlich.

Zum Glück wird ein Ausweg präsentiert. „Bei früher Erkennung ist Prostatakrebs aber in über 70% aller Fälle durch Behandlung heilbar“, wird versprochen. Das macht Mut zur Vorsorge zu gehen und sich testen zu lassen, wie es auch in der Broschüre empfohlen wird.

Dabei werden drei verschiedene Tests vorgeschlagen zum einen ein Test durch Abtasten, bei dem nur Tumore größer 1cm erkannt werden können. Diese sind meist nicht mehr schleichend, sondern müssen meist auf jeden Fall behandelt werden. Der zweite Test, der angeboten wird ist die Bestimmung des sogenannten Prostata-spezifischen-Antigen-Werts (PSA-Wert). Im Falle einer Entzündung der Prostata ist dieser Wert stark erhöht, bei einer vorliegenden Krebserkrankung mäßig. Dieser Wert kann folglich weitere Hinweise auf eine Erkrankung liefern.

Der dritte Test ist weitaus invasiver und wird erst durchgeführt, wenn vorherige Tests positiv ausgefallen sind. Dabei wird mit einer Nadel an mehreren Stellen Gewebe entnommen und im Labor begutachtet. Im Vergleich zur Abtastung und dem PSA Bluttest können hier schwere Nebenwirkungen auftreten. Beispiele sind länger anhaltende Schmerzen und Blutungen bis hin zu lebenslanger Inkontinenz.

Aufgrund der Schwere der möglichen Nebenwirkungen wird dieser Test zurecht nur nach einem Positiven Ergebnis der beiden anderen Tests durchgeführt. Das Problem hierbei ist aber, dass sich der PSA-Test gar nicht zur Erkennung von möglich vorliegenden Erkrankungen eignet. Entwickelt wurde er ursprünglich für die Krebsnachsorge nach einer Operation oder Strahlentherapie um zu beobachten, ob der Krebs auch vollständig entfernt wurde. In drei von vier Fällen ergibt sich ein positives Ergebnis, auch wenn keine Erkrankung vorliegt (false-positive). Daher wird ein möglicherweise nebenwirkungsreicher Eingriff in Form des dritten Tests durchgeführt, auch wenn gar keine Erkrankung vorliegt.

Zusätzlich zur obigen Problematik ergibt sich, dass es bei Prostatakrebs langsam wachsende Varianten vorkommen. Aufgrund des hohen Alters des Mannes mit Krebs kann es nun sein, dass die Krebserkrankung für die Lebensqualität oder das Lebensalter keinen Einfluss mehr hat, da die Todesursache sehr wahrscheinlich eine andere sein wird (z.B. eine viel häufigere Todesursache in Deutschland: Herzerkrankungen).

Wo liegt in dieser Situation nun der Fehlschluss? Der Fehlschluss wird durch die Präsentation der Daten provoziert, womöglich unter anderem auch bewusst, da mehr getestete Personen auch mehr Umsatz bedeuten. Meist wird in den Informationsbroschüren von einer *5-Jahres Überlebensrate* gesprochen. Dargestellt werden die Informationen wie folgt[10].

Nehmen wir an, es wird kein Früherkennungstest durchgeführt und angenommen 1000 Männer haben Prostatakrebs, der nicht zur langsam wachsenden Variante gehört. Nach 5 Jahren sterben von diesen 1000 Menschen 440 und 560 sind noch am Leben. Das ergibt eine 5-Jahres Überlebensrate von $\frac{440}{1000} = 44\%$.

Wird nun der Früherkennungstest durchgeführt, so werden die 1000 Männer mit Prostatakrebs aus der vorherigen Gruppe erkannt und zusätzlich aber noch 2000 Männer, die an einer sehr langsam wachsenden Variante leiden. Diese wächst so langsam, dass alle 2000 aus der langsam wachsenden Gruppe überleben und wie vorhin wieder 440 aus der anderen Gruppe sterben nach fünf Jahren. Das ergibt eine 5-Jahres Überlebensrate von nun $\frac{2000+440}{1000+2000} = \frac{2440}{3000} = 81\%$. Eine beachtliche Steigerung der Überlebensrate, die auf den ersten Blick jeden überzeugt, dass Früherkennung wichtig ist und die Überlebenswahrscheinlichkeit steigert.

[7] [Statistisches Bundesamt (2013/01)]
[8] [Statistisches Bundesamt (2013/02)]
[9] [Deutsche Gesellschaft für Urologie e.V. (2014)]
[10] [Gigerenzer (2014)], S.190

Betrachtet man nun aber die absolute Sterbe- und Überlebensrate für Prostatakrebs, so hat sich an den 440 Personen, die gestorben sind nichts geändert. Genau so wenig wurde eine Aussage über die absolute Sterberate an Prostatakrebs in der Bevölkerung oder ein Einfluss des Früherkennungstests getroffen. Es wurde eventuell sogar im Gegenteil bei der Gruppe der langsam wachsenden Krebse Test drei durchgeführt und bei einem Anteil der Getesteten kam es zu Nebenwirkungen, die diese nun beeinträchtigen. Der Fehlschluss hier ist also, dass die Daten dieser Studie nichts über die absolute Überlebenswahrscheinlichkeit und auch nichts über die Nützlichkeit des Früherkennungstests aussagt, aber dafür herangezogen wird.

Analog dazu führt die Aussage über Überlebensjahre in die Irre. Nehmen wir an, dass zwei Männer mit 70 Jahren an Krebs sterben, bei einem der Krebs erst in einem fortgeschrittenen Stadium mit 67 Jahren und bei dem anderen durch einen Früherkennungstest mit 62 Jahren entdeckt wurde. So hat der erste Mann noch 3 Jahre mit Krebs überlebt, der zweite schon 8. Auf den ersten Blick erscheint daher die Früherkennung gut, da bei einer solchen Präsentation die Jahre, die mit Krebs überlebt wurden erhöht wurden. Gestorben sind beide Männer aber dennoch zum gleichen Zeitpunkt mit 70 Jahren[11].

Fehlschluss beim Ziegenproblem

Die Spielshow *Geh aufs Ganze!*, lief im deutschen Fernsehen von 1992 bis 1997. Angelehnt an die US-Amerikanische Spielshow *Let's make a Deal*, konnte der Teilnehmer aus drei Toren auswählen. Hinter einem dieser drei Tore befand sich zufällig platziert der Hauptgewinn, hinter den anderen zwei ein „Zonk“ oder im Falle der amerikanischen Show eine Ziege.

Das Problem, das hier betrachtet werden soll entspricht nicht zur Gänze der Spielshowsituation, hat aber interessante Eigenschaften im Bezug auf Fehlschlüsse mit Wahrscheinlichkeiten. 1975 wurde das hier beschriebene *Monty Hall Problem*[12] in der Zeitschrift *American Statistician* erstmals als interessantes Problem für wissenschaftlichen Überlegungen beschrieben[13]. Der Ablauf funktioniert wie folgt.

Der Teilnehmer wählt eines der drei Tore aus hinter dem er denkt, dass sich der Hauptgewinn befindet. Dieses Tor wird nicht sofort geöffnet. Stattdessen öffnet der Moderator eines der zwei verbleibenden Tore, hinter dem sich auf jeden Fall eine Ziege befindet[14] . Der Teilnehmer hat nun die Chance seine Entscheidung noch einmal zu überdenken und auf das andere verbleibende Tor zu wechseln, oder bei seiner ursprünglichen Entscheidung zu verbleiben.

Die interessante Frage ist nun, ist es besser zu wechseln oder bei der ursprünglichen Wahl zu bleiben? Als Mensch mit Grundbildung in Wahrscheinlichkeit aus der Schule mag man folgende Überlegung anstellen. Zu Beginn wird der Gewinn hinter einem der Tore zufällig versteckt. Die Wahrscheinlichkeit diesen zu wählen liegt folglich bei $\frac{1}{3}$. Öffnet nun der Moderator eine der Türen, hinter denen sich eine Ziege befindet, bleiben noch das ursprünglich gewählte Tor und ein anderes übrig. Der direkte Schluss folgt, dass nun hinter einem Tor der Gewinn sein muss und hinter dem anderen eine Ziege. Die Gewinnwahrscheinlichkeit für beide verbleibende Tore beträgt somit $\frac{1}{2}$ und es ist irrelevant, ob man sich umentscheidet oder nicht.

Hier liegt der Fehlschluss. Die Wahrscheinlichkeit den Gewinn zu ziehen liegt in diesem Fall bei $\frac{1}{3}$, sollte man bei der Wahl bleiben, und bei $\frac{2}{3}$, sollte man sich umentscheiden. Dieses Ergebnis ist derart kontraintuitiv für Menschen, dass nach der Veröffentlichung des Problems in der Zeitschrift und einer weitaus breiteren Diskussion im Parade Magazine[15] ein wahrer Streit unter Mathematikern ausbrach. Wie kommt man nun einfach auf die richtige Lösung des Ziegenproblems. Eine einfache Strategie zur Lösung dieses und auch der beiden anderen Probleme soll im nächsten Abschnitt diskutiert werden.

[11] [Gigerenzer et al. (2007)]
[12] Benannt nach dem amerikanischen Moderator der Show, Monty Hall.
[13] [Rosenhouse (2009)], S. 20
[14] Für den Fall, dass der Teilnehmer das Tor gewählt hat, hinter dem sich der Gewinn befindet, hat der Moderator eine Wahl, welches der beiden Tore geöffnet werden soll. In diesem Fall wir der Moderator zufällig zwischen diesen beiden wählen.
[15] [Rosenhouse (2009)], S. 22

Zwei Vermeidungsstrategien

Es wurde nun anhand von drei Beispielen festgestellt, dass Menschen oft schlechte Entscheidungen treffen, wenn es um Wahrscheinlichkeiten geht. Im Folgenden werden nun zwei einfache Strategien vorgestellt, die angewandt werden können, um falsches Denken zu vermeiden. Die erste ist die Frage nach der Referenzklasse. Worauf beziehen sich Angaben von Wahrscheinlichkeiten? Die zweite ist die einfache Technik des Aufzählens von Möglichkeiten. Anhand dieser können anschließend einfach Wahrscheinlichkeiten ausgerechnet werden, die relevant für eine richtige Entscheidung sind.

Die Referenzklasse

Bei allen Wahrscheinlichkeits- und Risikoangaben sollte als Erstes geklärt werden, auf welche Referenz sich die Wahrscheinlichkeit bezieht. Mit Referenz ist hier die Bezugsklasse der Ereignisse gemeint. Dies sind alle möglichen Ausgänge einer Situation, für die eine Wahrscheinlichkeit angegeben werden soll. Beim Würfeln sind die Menge der Möglichkeiten beispielsweise die Zahlen Eins bis Sechs (gegeben, dass ein einzelner Würfelwurf im Spiel gespielt wird).

Im Beispiel des Casinos beziehen sich die Angaben, wie oft Rot oder Schwarz gewonnen haben, nicht absolut auf den Tisch. Vielmehr werden nur die empirischen Gewinnanteile der letzten paar Spiele benannt. Schlussfolgerungen daraus gezogen beziehen sich somit nicht auf die absolute Gewinnwahrscheinlichkeit in Zukunft sondern darauf, wie die Gewinnwahrscheinlichkeit in den letzten paar betrachteten Spielen war.

Im Fall der Krebsvorsorge ist die Situation noch eindeutiger. Behandlungserfolge und Überlebenswahrscheinlichkeiten beziehen sich nicht absolut auf das Risiko, welches ein jeder Mann hat in seinem Leben an Prostatakrebs zu sterben, sondern nur auf die Überlebenswahrscheinlichkeit in einem Zeitraum von fünf Jahren nach der Diagnose. Nach diesem Zeitraum besteht immer noch die Möglichkeit, dass alle Probanden verstorben sind. An der Wahrscheinlichkeit, die in der Broschüre landet ändert sich aber nichts.

Das dritte Beispiel ist am schwierigsten zu verstehen. Der Schluss, dass ein Wechsel keinen Vorteil bringt, da noch zwei Türen übrig sind ist korrekt für den Fall, dass ein unbedarfter Teilnehmer zu diesem Zeitpunkt in das Spiel einsteigt und keine Interaktion vorher stattfand. Die Gewinnwahrscheinlichkeiten $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ beziehen sich aber auf das Gesamtspiel inklusive des zweistufigen Entscheidungsprozesses.

Zählen

Die Technik des Zählens ist eine sehr einfache und gleichzeitig sehr mächtige Methode Wahrscheinlichkeiten auszurechnen. Zugleich hat sie den Vorteil, dass sie für den Mensch sehr einfach nachzuvollziehen und zu verstehen ist. Angewandt auf die drei Beispiele ergibt sich intuitiv jeweils die richtige und leicht verständliche Lösung.

Das zugrundeliegende Vorgehen bei diesem Lösungsprinzip ist einfach. In einem ersten Schritt müssen alle Möglichkeiten, die sich in einer Situation ergeben können aufgezählt werden. In einem zweiten Schritt werden die Möglichkeiten in zwei Gruppen aufgeteilt, einmal zu dem Ereignis zugeordnet, für dessen Wahrscheinlichkeit man sich interessiert und einmal alle anderen Ereignisse. In einem letzten Schritt teilt man nun die Anzahl der Element in der Gruppe, die relevant ist, durch die Gesamtzahl der Elemente und erhält die richtige Wahrscheinlichkeit.

Im Falle des Roulettespiels lassen die Möglichkeiten leicht aufzählen. Im Roulettekessel sind 36 Zahlen angeordnet. Zusätzlich noch eine 0 und eine 00. Insgesamt ergeben sich somit 38 Möglichkeiten, auf denen die Kugel landen kann. Interessieren wir uns nun für die Gewinnwahrscheinlichkeit im Falle, dass wir auf die 1 gesetzt haben ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{38} \approx 2,6\%$. Die Wahrscheinlichkeit zu verlieren beträgt dementsprechend $\frac{37}{38} \approx 97,4\%$. Auf die 0 und 00 kann nicht gesetzt werden, die Bank gewinnt aber in diesen beiden Fällen. Auf lange Sicht gewinnt folglich die Bank.

Natürlich muss bei der Technik des Zählens grundsätzlich darauf geachtet werden, dass genug Daten erhoben werden. Dies bedeutet für die Technik des Zählens, dass sie ohne Probleme in Situationen angewendet werden kann, in denen alle möglichen Ausgänge der Situation und Entscheidung aufgezählt werden können. Hier liegen alle Daten vor und es kann der richtige Schluss gezogen werden. Handelt es sich aber um einen statistischen Prozess, bei dem sehr viele Möglichkeiten zur Auswahl stehen (beispielsweise Roulette), so reicht die Menge der Daten, die ein Einzelner in kurzer Zeit nur durch Beobachtung des Spiels erheben kann nicht aus.[16]

Soll die Wirksamkeit der Krebsvorsorge untersucht werden liegt ein solcher Fall vor. Die Menge der Möglichkeiten, beziehungsweise ihre Wahrscheinlichkeiten, sind unbekannt. Daher werden Probandenstudien durchgeführt an denen sehr viele Menschen teilnehmen, die eine möglichst breite Bevölkerungsgruppe repräsentieren sollen.

Genau dies wurde mehrfach durchgeführt und die Ergebnisse aus mehreren Studien präsentieren sich wie folgt[17].

Angenommen 100 Männer nehmen an der Studie Teil, bei denen keine Vorsorgeuntersuchung durchgeführt wird. So werden aus dieser Gruppe 20 Männer sterben, wovon bei einem die Ursache Prostatakrebs war. Insgesamt überleben 80 Männer von 100.

Weitere 100 Männer nehmen an der Studie teil und führen regelmäßige Vorsorgeuntersuchungen durch, so sterben aus dieser Gruppe auch 20 Männer, wovon einer an Prostatakrebs stirbt. Zusätzlich wird aber bei 2 Männern eine nicht schnell wachsende Form von Krebs erkannt, die aber nicht zum Tod führt und bei 18 Männern schlägt der Test an, sodass Gewebe zur Untersuchung entnommen wird. Insgesamt überleben folglich 80 von 100 Männern. Zusätzlich haben aber 18+2 Männer schreckliche Diagnosen und unter Umständen sogar starke Langzeitfolgen durch die Gewebeentnahme.

Fragen wir uns nun nach dem Ergebnis „Mann lebt und hat ein unbeschwertes Leben“, ergibt sich in dem Fall ohne Vorsorgeuntersuchung die Wahrscheinlichkeit $\frac{80}{100} = 80\%$. Im Fall mit Vorsorgeuntersuchung hingegen $\frac{80-2-18}{100} = \frac{60}{100} = 60\%$. Die Vorsorgeuntersuchung schneidet in diesem Hinblick folglich schlechter ab.

Da das Ziegenproblem auch das schwierigste zu verstehen ist, ist logischerweise auch die Erklärung nicht ganz trivial. Dennoch kann auch dieses Problem durch Abzählen aller Möglichkeiten gelöst werden[18].

Nehmen wir grundsätzlich an, dass das Auto gleichverteilt hinter den drei Toren versteckt wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto sich hinter einem Tor befindet beträgt folglich $\frac{1}{3}$. Das Problem ist nun mehrstufig zu sehen. Als erster Schritt wird von dem Kandidaten ein Tor gewählt. Da sich die Situation als symmetrisch erweist, macht es für die Betrachtung keinen Unterschied, welches Tor der Kandidat wählt[19] und das Ergebnis, das man erhält unter der Annahme, dass der Kandidat das erste Tor gewählt hat lässt sich auf die beiden anderen Fälle übertragen. Nehmen wir also an, dass der Kandidat das erste Tor wählt. Im nächsten Schritt bestehen nun vier Möglichkeiten, wie das Spiel weiter verlaufen kann. Der Kandidat wählt Tor eins. Das Auto ist hinter Tor eins. Folglich kann der Moderator nur Tor zwei oder drei öffnen. All diese Möglichkeiten können einfach als Tripel (Kandidatenwahl, Moderator öffnet, Auto war tatsächlich hinter Tor) notiert werden. Für den Fall, dass der Moderator nun Tor zwei öffnet, das Auto aber hinter Tor eins war ergibt sich nun $(1, 2, 1)$. Analog dazu können folgende vier Möglichkeiten aufgezählt werden:

$$(1, 2, 1)\ (1, 3, 1)\ (1, 2, 3)\ (1, 3, 2)$$

Bei den letzten beiden Möglichkeiten hat der Moderator keine Wahl welches Tor er öffnet, da eines gewählt wurde und hinter dem anderen der Hauptgewinn versteckt ist.

Wie können nun Wahrscheinlichkeiten auf diese vier Möglichkeiten verteilt werden? Festgelegt ist, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Gewinn hinter einem bestimmten Tor befindet $\frac{1}{3}$ beträgt. Folgendermaßen erhält man für den Fall, dass sich das Auto hinter Tor drei befindet eine Möglichkeit, $(1, 2, 3)$. Dies Möglichkeit muss nun die volle Wahrscheinlichkeit für „Gewinn hinter Tor drei“ erhalten. Der Spielverlauf $(1, 2, 3)$ erhält somit die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$. Das Selbe für $(1, 3, 2)$. Für die ersten beiden Fälle ist die Situation unterschiedlich, da in beiden angenommen wird, dass der Gewinn hinter Tor eins versteckt liegt. Die Wahrscheinlichkeit muss sich so auf die beiden Fälle aufteilen und $(1, 2, 1)$, sowie $(1, 3, 1)$ erhalten somit jeweils Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.

[16][Keren & Lewis (1994)] bezeichnen diese Art des Fehlschlusses als *Gambler's Fallacy Type II*. Menschen schließen von einer sehr kleinen Menge an Daten auf Verteilungen und Muster, obwohl eine sehr viel größere Menge nötig wäre. Als Beispiel wird das Zählen von Zahlenhäufigkeiten am Roulettetisch angegeben. Hat sich im Verlauf eines Spiels zufällig eine Häufung einer bestimmten Zahl ergeben, schließt der Spieler darauf, dass der Tisch gebiased sein muss. Das heißt der Mensch erwartet, dass der Spielprozess diese Zahl bevorzugt, obwohl dem eventuell gar nicht so ist.

[17][Gigerenzer (2014)], S. 194

[18][Rosenhouse (2009)], S.46ff gibt eine sehr detaillierte Analyse dieser Lösungsmöglichkeit, sowie weiterer Ansätze.

[19]Mathematisch wird dieser Sachverhalt meist *ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA)* genannt.

Um nun die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn mit Wechsel des Tores zu bestimmen zählt man die Wahrscheinlichkeiten der Spielverläufe zusammen, bei denen gewonnen wird. So erhält man für $(1, 2, 3)$ und $(1, 3, 2)$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ Gewinnwahrscheinlichkeit. Möchten man nun bestimmen, wie die Gewinnwahrscheinlichkeit ohne Wechsel ist, so zählt man die entsprechenden Verläufe zusammen. Es ergibt sich für $(1, 2, 1)$ und $(1, 3, 1)$ $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Das Ergebnis ist nun, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einem Wechsel $\frac{2}{3}$, bei keinem Wechsel $\frac{1}{3}$ beträgt.

Schluss

In der Vorliegenden Arbeit wurde zu Beginn die These aufgestellt, dass Menschen oft schlechte Entscheidungen treffen, wenn Wahrscheinlichkeiten im Spiel sind. Dies wurde anhand von drei Beispielen gezeigt, bei denen viele Menschen intuitiv falsch entscheiden. Das erste Beispiel spielte im Casino und behandelte den berühmten Spielerfehlschluss, bei dem aus einer kleine Menge von Beobachtungen auf eine Regelmäßigkeit geschlossen wird. Das zweite Beispiel zeigte die Schwierigkeiten bei Entscheidungen zu Krebsvorsorgeuntersuchungen, die sich genau so auf andere Krankheiten übertragen lassen. Patienten wird in Informationsbroschüren die Faktenlage zum Teil missverständlich präsentiert. Die Zahlen werden auf verkürzte Untersuchungszeiträume bezogen, sodass Aussagen zur Überlebenswahrscheinlichkeit oder zur Wirksamkeit von Vorsorgeuntersuchungen nicht getroffen werden können. Das letzte Beispiel, das Ziegenproblem, illustriert wie sehr die Wahrscheinlichkeiten unseren natürlichen Intuitionen zuwiderlaufen. Die richtige Lösung des zweistufigen Entscheidungsprozesses lässt sich nur schwer verständlich machen und führt daher auch ausgewiesene Experten in die Irre.

Im Anschluss wurden zwei Vermeidungsstrategien, die Frage nach der Referenzklasse und simples Abzählen, vorgestellt. Erstere Technik hilft zu klären, worauf sich die Angaben von Wahrscheinlichkeiten beziehen und ob diese folglich auch wirklich relevant bezüglich der Entscheidung sind. Die zweite Technik kann verwendet werden, um sich einfach die richtigen Wahrscheinlichkeiten herzuleiten. Diese beiden Techniken helfen somit bessere Entscheidungen in derartigen Situationen zu treffen.

In dieser Arbeit konnte nicht auf die Ursachen der Fehlentscheidungen, sowie auf die psychologischen Prozesse, die zu falschen Vorstellungen führen, eingegangen werden. Eine sehr umfangreiche Abhandlung über diese Ursachen, sowie weitere interessante Prozesse bei der Entscheidung in der menschlichen Psyche finden sich bei [Kahneman (2012)].

Literatur

[Gigerenzer (2014)] G. Gigerenzer. Risk savvy, how to make good decisions. *Penguin Books, New York*, 2014.

[Gigerenzer et al. (2007)] G. Gigerenzer, W. Gaissmaier, E. Kurz-Milcke, L.M. Schwartz, and S. Woloshin. Helping doctors and patients to make sense of health statistics. *Psychological Science in the Public Interest*, No. 8, 2007.

[Rosenhouse (2009)] J. Rosenhouse. The Monty Hall Problem: The Remarkable Story of Math's Most Contentious Brainteaser. *Oxford University Press, New York*, 2009.

[Keren & Lewis (1994)] G. Keren and C. Lewis. The Two Fallacies of Gamblers: Type I and Type II. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, Vol. 60, No. 1, 1994.

[Deutsche Gesellschaft für Urologie e.V. (2014)] Deutsche Gesellschaft für Urologie e.V und Berufsverband der Deutschen Urologen e.V. PSA-Test: Bedeutung bei der Früherkennung von Prostatakrebs. `http://www.prostata.de/fileadmin/MDB/Pdf/bro_PSA_2014_2.pdf`, Stand: 10.08.2015.

[Statistisches Bundesamt (2013/01)] Statistisches Bundesamt. Todesursachen. `https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/GesellschaftStaat/Gesundheit/Todesursachen/Todesursachen.html`, Stand. 10.08.2015.

[Statistisches Bundesamt (2013/02)] Statistisches Bundesamt. Sterbefälle männlich nach der ICD-10 im Jahr 2013. `https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/GesellschaftStaat/Gesundheit/Todesursachen/Tabellen/HaeufigsteTodesursachen.html#tab671378No3`, Stand: 10.08.2015.

[Kahneman (2012)] D. Kahneman. Schnelles Denken, langsames Denken. (engl. orig. *Thinking, fast and slow*). Siedler Verlag, München, 2012.

[Tversky & Kahneman (1974)] A. Tversky and D. Kahneman. Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science*, Vol. 185, No. 4157, 1974.